

## Dai numeri alle lettere: primi passi

### Obiettivi

- Saper ricorrere ai valori numerici che può assumere una formula algebrica ai fini della risoluzione di un problema; riconoscere regolarità numeriche ed esprimerle in forma algebrica.
- Usare le proprietà delle operazioni per dimostrare.
- Saper trarre informazioni dalle diverse forme che può assumere una formula algebrica (forma polinomiale o forma fattorizzata).

### Ostacoli concettuali da tenere in considerazione

Talvolta gli studenti acquisiscono meccanicamente le regole di calcolo algebrico, senza riflettere sul fatto che una formula algebrica rappresenta una procedura di calcolo all'interno di un insieme numerico. Così passa del tutto inosservato il fatto che la scomposizione in fattori di una formula algebrica permette di ricavare informazioni importanti sulle caratteristiche dei numeri che sono il risultato della procedura di calcolo eseguita.

### La lezione

Partendo dal problema

Sara, Giovanni e Pietro devono rispondere a un quesito posto dalla loro insegnante: «Se  $n$  è un numero naturale qualsiasi, che cosa si ottiene addizionando i tre numeri  $4n + 3$ ,  $4n + 5$ ,  $4n + 7$ ?».

- Sara afferma: «Si ottiene sempre un numero dispari».
- Giovanni afferma: «Si ottiene sempre un multiplo di 4».
- Pietro afferma: «Si ottiene sempre il doppio di uno dei tre numeri».

Chi ha ragione?

- ☐ **a** Solo Sara      ☐ **b** Solo Giovanni      ☐ **c** Solo Pietro      ☐ **d** Nessuno dei tre

si propone agli studenti un'indagine sul significato numerico di una formula, sfruttando le potenzialità di un foglio di calcolo. La grande quantità di valori che si possono attribuire alla variabile indipendente e l'osservazione delle caratteristiche dei risultati dovrebbero aiutare gli allievi alla congettura; sarà opportuno far capire loro tuttavia che solo attraverso un calcolo algebrico basato sulle proprietà generali delle operazioni tale congettura può essere validata con una dimostrazione.

La durata complessiva dell'attività è di 1 ora e 10 minuti.

Fase		Tempi
1	L'insegnante presenta il problema da risolvere; gli studenti lavorano a piccoli gruppi sulla Scheda 1 (vedere un esempio di videata finale relativa alla Scheda 1).	50 minuti
2	L'insegnante chiede agli studenti di riassumere quanto scritto, riprende e istituzionalizza i risultati.	20 minuti

### Eventuale approfondimento

- Dimostrare con un contro esempio; è possibile proporre agli studenti il seguente problema:  
*Se  $n$  è un numero naturale qualsiasi, che tipo di numero si ottiene dalla formula  $n^2 - n + 11$ ?*  
Si può chiedere di esplorare la situazione con un Foglio di calcolo. Si noterà che per  $n = 11$  il risultato non è primo. In questo modo si mostrerà che un solo contro esempio numerico permette di affermare la falsità di un'affermazione generale.  
In alternativa si può proporre di esplorare la formula  $n^2 - 79n + 1601$  che restituisce il primo risultato non primo per  $n = 80$ .
- È infine possibile lavorare su quesiti INVALSI relativi agli argomenti trattati.

### Materiali di lavoro

- Scheda 1 – Scheda di lavoro per lo studente

## • Scheda 1 – Scheda di lavoro per lo studente

Sara, Giovanni e Pietro devono rispondere a un quesito posto dalla loro insegnante: «Se  $n$  è un numero naturale qualsiasi, che cosa si ottiene addizionando i tre numeri  $4n + 3$ ,  $4n + 5$ ,  $4n + 7$ ?».

- Sara afferma: «Si ottiene sempre un numero dispari».
- Giovanni afferma: «Si ottiene sempre un multiplo di 4».
- Pietro afferma: «Si ottiene sempre il doppio di uno dei tre numeri».

Chi ha ragione?

- ☐ **a** Solo Sara      ☐ **b** Solo Giovanni      ☐ **c** Solo Pietro      ☐ **d** Nessuno dei tre

Prima di rispondere esplora il problema con GeoGebra: apri un file e visualizza soltanto il Foglio di calcolo.

Intesta le colonne A, B, C, D ed E nel seguente modo:

Vista Foglio di calcolo					
	A	B	C	D	E
1	n	$4n+3$	$4n+5$	$4n+7$	Somma

Nella colonna A, a partire da A2, scrivi i primi numeri naturali da 0 a 100.

In B2 inserisci la formula che prende il numero naturale contenuto in A2, lo moltiplica per 4 e somma al risultato 3 (non dimenticare di premettere alla formula il segno =);

In C2 inserisci la formula che prende il numero naturale contenuto in A2, lo moltiplica per 4 e somma al risultato 5.

In D2 inserisci la formula che prende il numero naturale contenuto in A2, lo moltiplica per 4 e somma al risultato 7.

Scrivi in E2 la somma di B2 + C2 + D2.

Seleziona le celle da B2 a E2 e trascina il quadratino blu che vedi in basso a destra di E2 per copiare in modo relativo il loro contenuto fino a che ci sono numeri nella colonna A.

- Osserva i risultati della formula  $4n + 3$ : che numeri sono (pari/dispari/multipli di 4)?
- Osserva i risultati della formula  $4n + 5$ : che numeri sono (pari/dispari/multipli di 4)?
- Osserva i risultati della formula  $4n + 7$ : che numeri sono (pari/dispari/multipli di 4)?
- Osserva i risultati della Somma: che numeri sono (pari/dispari/multipli di 4)?

Pensa alle osservazioni che hai fatto fino a ora e rispondi: come sarà la somma dei numeri ottenuti dalle tre formule? Tale somma sarà **sempre** così, per qualunque valore si assegna a  $n$ ?

Rispondi alla domanda del problema giustificando le tue affermazioni.

Ritorna ora alla somma dei tre numeri: si può affermare che il risultato è sempre multiplo di un numero naturale: quale?

Se non riesci a individuare la regolarità, ricorri ancora all'esplorazione numerica, chiedendo a GeoGebra di scomporre in fattori primi i 100 numeri somma che hai trovato. Per fare ciò vai nella barra di inserimento e scrivi  $F2 = \text{FattoriPrimi}[E2]$  e copia la formula per tutti i numeri della colonna E.

Osserva le scomposizioni e fai le tue valutazioni: la somma dei tre numeri restituisce sempre un multiplo di .....

Hai esaminato 100 numeri: non è detto che al duecentesimo valore la regolarità si mantenga. Per dimostrare la validità generale della tua affermazione devi lavorare sui meccanismi di calcolo che danno il risultato, ovvero sulle formule algebriche. Somma quindi i monomi simili dell'espressione  $(4n + 3) + (4n + 5) + (4n + 7)$  e raccogli il fattore comune dai due monomi che ottieni. Qual è questo fattore comune?

► Vista Foglio di calcolo

	B	C	D	E	F
1	$4n+3$	$4n+5$	$4n+7$	Somma	
2	3	5	7	15	{3, 5}
3	Numero B2: $4A2 + 3$		11	27	{3, 3, 3}
4	11	13	15	39	{3, 13}
5	15	17	19	51	{3, 17}
6	19	21	23	63	{3, 3, 7}
7	23	25	27	75	{3, 5, 5}
8	27	29	31	87	{3, 29}
9	31	33	35	99	{3, 3, 11}
10	35	37	39	111	{3, 37}
11	39	41	43	123	{3, 41}
12	43	45	47	135	{3, 3, 3, 5}
13	47	49	51	147	{3, 7, 7}
14	51	53	55	159	{3, 53}
15	55	57	59	171	{3, 3, 19}
16	59	61	63	183	{3, 61}
17	63	65	67	195	{3, 5, 13}
18	67	69	71	207	{3, 3, 23}
19	71	73	75	219	{3, 73}
20	75	77	79	231	{3, 7, 11}
21	79	81	83	243	{3, 3, 3, 3, 3}

Videata finale Scheda 1

## Approfondimento

- False formule di numeri primi: videata del Foglio di calcolo.

n	$n^2 - n + 11$		$n^2 - 79n + 1601$	
0	11	{11}	1601	{1601}
1	11	{11}	1523	{1523}
2	13	{13}	1447	{1447}
3	Numero B4: $A4^2 - A4 + 11$		1373	{1373}
4	23	{23}	1301	{1301}
5	31	{31}	1231	{1231}
6	41	{41}	1163	{1163}
7	53	{53}	1097	{1097}
8	67	{67}	1033	{1033}
9	83	{83}	971	{971}
10	101	{101}	911	{911}
11	121	{11, 11}	853	{853}
12	143	{11, 13}	797	{797}
13	167	{167}	743	{743}
14	193	{193}	691	{691}
15	221	{13, 17}	641	{641}
16	251	{251}	593	{593}
17	283	{283}	547	{547}
18	317	{317}	503	{503}
19	353	{353}	461	{461}
20	391	{17, 23}	421	{421}

**Quesiti tratti dalle Prove INVALSI relativi all'argomento****Prova di Matematica Classe II scuola secondaria di secondo grado 2012/13****Quesito D16****D16.** Indica se ciascuna delle seguenti proposizioni è vera (V) o falsa (F).

		<b>V</b>	<b>F</b>
a.	Se un numero è pari allora è multiplo di 4.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b.	Se un numero è multiplo di 9 allora è multiplo di 3.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c.	Un numero è multiplo di 6 solo se è pari.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d.	Un numero è multiplo di 5 se e solo se è multiplo di 10.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Prova di Matematica Classe II scuola secondaria di secondo grado 2010/11****Quesito D4****D4.** Considera l'affermazione: "Per ogni numero naturale  $n$ ,  $2^n + 1$  è un numero primo". Mostra con un esempio che l'affermazione è falsa.

.....

.....

.....